

MATEMATIKA 5-5-6-6

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról mint tudásrendszerrel és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységről. A matematika tanulása érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja, gazdagítja a személyiséget, fejleszti az önálló, rendszerezett gondolkodást, és alkalmazásra képes tudást hoz létre. A matematikai gondolkodás fejlesztése segíti a gondolkodás általános kultúrájának kiteljesedését.

A matematikatanítás feladata a matematika különböző arculatainak bemutatása. A matematika: kulturális örökség; gondolkodásmód; alkotó tevékenység; a gondolkodás örömeinek forrása; a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője; önálló tudomány; más tudományok segítőtje; a mindennapi élet része és a szakmák eszköze.

A tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése során alapvető cél, hogy mindinkább ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytan, statisztikai stb.) és leírásokat. A matematikai nevelés sokoldalúan fejleszti a tanulók modellalkotó tevékenységét. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése. Egyaránt lényeges a reprodukív és a problémamegoldó, valamint az alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, miközben nem szorulhat háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése sem. A tanulás elvezethet a matematika szerepének megértésére a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában. Segít kialakítani a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét. Megmutathatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. Fejleszti a tanulók térbeli tájékozódását, esztétikai érzékét.

A tanulási folyamat során fokozatosan megismertetjük a tanulókkal a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása). Mindezzel fejlesztjük a tanulók absztrakciós és szintetizáló képességét. Az új fogalmak alkotása, az összefüggések felfedezése és az ismeretek feladatokban való alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a kreativitást, az önálló gondolatok megfogalmazását, a felmerült problémák megfelelő önbizalommal történő megközelítését, megoldását. A diskussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a többféle nézőpont érvényesítését, a komplex problémakezelés képességét is fejleszti. A folyamat végén a tanulók eljutnak az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére.

A műveltségi terület a különböző témakörök szerves egymásra épülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. A fogalmak, összefüggések érlelése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol – az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően. Ez a felépítés egyaránt lehetővé teszi a lassabban haladókkal való foglalkozást és a tehetség kibontakoztatását.

A matematikai értékek megismerésével és a matematikai tudás birtokában a tanulók hatékonyan tudják használni a megszerzett kompetenciákat az élet különböző területein. A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, illetve a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez. Ezért a tanulóknak rendelkezniük kell azzal a képességgel és készséggel, hogy alkalmazni tudják matematikai tudásukat, és felismerjék, hogy a megismert fogalmakat és

tételeket változatos területeken használhatjuk. Az adatok, táblázatok, grafikonok értelmezésének megismerése nagyban segítheti a mindennapokban, és különösen a média közleményeiben való reális tájékozódást. Mindehhez elengedhetetlen egyszerű matematikai szövegek értelmezése, elemzése. A tanulóktól megkívánjuk a szaknyelv életkornak megfelelő, pontos használatát, a jelölésrendszer helyes alkalmazását írásban és szóban egyaránt.

A tanulók rendszeresen oldjanak meg önállóan feladatokat, aktívan vegyenek részt a tanítási, tanulási folyamatban. A feladatmegoldáson keresztül a tanulók képessé válhatnak a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára. Kialakul bennük az önellenőrzés igénye, a sajátjukétól eltérő szemlélet tisztelete. Mindezek érdekében is a tanítás folyamában törekedni kell a tanulók pozitív motiváltságának biztosítására, önállóságuk fejlesztésére. A matematikatanítás, -tanulás folyamatában egyre nagyobb szerepet kaphat az önálló ismeretszerzés képességnek fejlesztése, az ajánlott, illetve az önállóan megkeresett, nyomtatott és internetes szakirodalom által. A matematika a lehetőségekhez igazodva támogatni tudja az elektronikus eszközök (zsebszámológép, számítógép, grafikus kalkulátor), internet, oktatóprogramok stb. célszerű felhasználását, ezzel hozzájárul a digitális kompetencia fejlődéséhez.

A tananyag egyes részleteinek csoportmunkában történő feldolgozása, a feladatmegoldások megbeszélése az együttműködési képesség, a kommunikációs képesség fejlesztésének, a reális önértékelés kialakulásának fontos területei. Ugyancsak nagy gondot kell fordítani a kommunikáció fejlesztésére (szövegértésre, mások szóban és írásban közölt gondolatainak meghallgatására, megértésére, saját gondolatok közlésére), az érveken alapuló vitakészség fejlesztésére. A matematikai szöveg értő olvasása, tankönyvek, lexikonok használata, szövegekből a lényeg kiemelése, a helyes jegyzeteléshez szoktatás a felsőfokú tanulást is segíti.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jártas a problémamegoldásban. A matematikatanítás alapvető feladata a pénzügyi-gazdasági kompetenciák kialakítása. Életkortól függő szinten rendszeresen foglalkozunk olyan feladatokkal, amelyekben valamilyen probléma legjobb megoldását keressük. Szánjunk kiemelt szerepet azoknak az optimum-problémáknak, amelyek gazdasági kérdésekkel foglalkoznak, amikor költség, kiadás minimumát; elérhető eredmény, bevétel maximumát keressük. Fokozatosan vezessük be matematikafeladatainkban a pénzügyi fogalmakat: bevétel, kiadás, haszon, kölcsön, kamat, értékcsökkenés, -növekedés, törlesztés, futamidő stb. Ezek a feladatok erősítik a tanulóknál azt a tudatot, hogy matematikából valóban hasznos ismereteket tanulnak, illetve, hogy a matematika alkalmazása a mindennapi élet szerves része. Az életkor előrehaladtával egyre több példát mutassunk arra, milyen területeken tud segíteni a matematika. Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy milyen matematikai ismereteket alkalmaznak az alapvetően matematikaigényes, illetve a matematikát csak kisebb részben használó szakmák (pl. informatikus, mérnök, közgazdász, pénzügyi szakember, biztosítási szakember, valamint pl. vegyész, grafikus, szociológus), ezzel is segítve a tanulók pályaválasztását.

A matematikához való pozitív hozzáállást nagyban segíthetik a matematikai tartalmú játékok és a matematikához kapcsolódó érdekes problémák és feladványok.

A matematika a kultúrtörténetnek is része. Segítheti a matematikához való pozitív hozzáállást, ha bemutatjuk a tananyag egyes elemeinek a művészetekben való alkalmazását. A motivációs bázis kialakításában komoly segítség lehet a matematikatörténet egy-egy mozzanatának megismertetése, a máig meg nem oldott, egyszerűnek tűnő matematikai sejtések megfogalmazása, nagy matematikusok életének, munkásságának megismerése. A NAT néhány matematikus ismeretét előírja minden tanuló számára: Euklidész, Pitagorasz, Descartes, Bolyai Farkas, Bolyai János, Thalész, Euler, Gauss, Pascal, Cantor, Erdős, Neumann. A kerettanterv ezen kívül is több helyen hívja fel a tananyag matematikatörténeti érdekességeire a figyelmet. Ebből a tanárkollégák csoportjuk jellegének megfelelően szabadon válogathatnak.

Minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Ez nemcsak az egyéni igények figyelembevételét jelenti. Sokszor az alkalmazhatóság vezérli a tananyag és a tárgyalásmód megválasztását, más esetekben a tudományos igényesség szintje szerinti differenciálás szükséges. Egy adott osztály matematikatanítása során a célok, feladatok teljesíthetősége igényli, hogy a tananyag megválasztásában a tanulói érdeklődés és a pályaorientáció is szerepet kapjon. A matematikát alkalmazó pályák felé vonzódó tanulók gondolkodtató, kreativitást igénylő versenyfeladatokkal motiválhatók, a humán területen továbbtanulni szándékozók számára érdekesebb a matematika kultúrtörténeti szerepének kidomborítása, másoknak a középiskolai matematika gyakorlati alkalmazhatósága fontos. A fokozott szaktanári figyelem, az iskolai könyvtár és az elektronikus eszközök használatának lehetősége segíthetik az esélyegyenlőség megvalósulását.

Az ország gazdaságának műszaki, informatikai, és természettudományos pályák iránt megnövekedett kereslete szükségesé teszi, hogy a közoktatásban is nagy számban legyenek olyan osztályok, csoportok, amelyek a matematikát és (vagy) a természettudományokat magasabb szinten tanulják. A gazdasági élet szakember-utánpótlását a normál és speciális osztályoké közötti, kb. heti 5 órás óraszámú, nagy számban működő emelt szintű osztályokkal célszerű biztosítani.

Ebben a kerettantervben a négy osztályos gimnáziumok olyan tanulóinak kívánunk magasabb szintű ismereteket nyújtani, akik nagyobb érdeklődést mutatnak a matematika iránt. Az ország középiskoláinak jelentős részében van egy osztálynyi vagy legalább egy félévsztálynyi matematika, illetve természettudományos tárgyak iránt érdeklődő tanuló, akiknek ajánlott kissé kibővített tananyaggal, magasabb szintű feladatanyaggal tanítani a matematikát.

Elsődleges célunk, hogy a tanulók szemléletét, gondolkodásmódját fejlesszük. Azt a lehetőséget, hogy ezt a tantervet a matematika iránt érdeklődő tanulók számára választják, és azt, hogy itt heti öt óra áll rendelkezésre a matematika elsajátítására, nem arra kívánjuk fordítani, hogy a speciális matematika tagozatos osztályokéhoz közelítő mértékben bővítsük a középiskolai anyagot, hanem olyan új ismereteket építettünk be, amelyek a szemléletfejlesztéshez, az összefüggések könnyebb felismeréséhez, a tantárgy megszerettetéséhez szükségesek. Mindez nem azt jelenti, hogy az eredményesség növelése másodrangú cél lenne. Sőt, így maradt idő hatékonyabb, de időigényes módszerek (pl. önálló felfedezettetés, differenciált feladatok) alkalmazására, egy-egy felmerülő probléma részletesebb elemzésére. A tapasztalatok azt mutatták, hogy a fenti célú mérsékelt tananyag-növekedés az elért szemléletfejlődéssel és a megnövekedett gyakorlási idővel jelentős teljesítményjavulást eredményez.

A tananyagot azért sem akarjuk a speciális matematika tagozatokéhoz hasonló mértékben növelni, mert ezt a matematikából emelt szintű anyagot ajánljuk fizikából, kémiából, természettudományos tárgyakból emelt szintű osztályoknak is.

Minden évfolyamon jelentős számú órát hagyunk szabadon választható felhasználásra. Ezt az óraszámot fel lehet használni versenyfeladatok megoldására, tematikusan, vagy egy-egy versenyre „rákészülésnél”. **A helyi tantervben mindegyik évfolyamon hagytunk szabad időkeretet, elsősorban ilyen célra. A csoportot tanító szaktanár a tanulók képességeihez igazodva használhatja ezt gyakorlásra, számonkérésre is. Ezekről az órákról még az adott tanévre készített tanmenetben sem gondoljuk, hogy előre kellene döntenie. Kell hogy legyen a helyi tantervben annyi rugalmasság, amely lehetőséget ad a tanár számára, hogy igazodjon a tanulók képességeihez – természetesen úgy, hogy az emelt szintű kerettantervben előírt tananyagot a tanulók elsajátították.**

A helyi tanterv alapjául szolgáló kerettanterv

Kerettanterv a gimnáziumok 9-12.osztályok számára / Emelt matematika A változat

A tankönyvek kiválasztásának elvei

A matematika tantárgy tanításához a tanulók életkori sajátosságait figyelembe vevő, a szaknyelv használatát az adott életkornak megfelelően alkalmazó taneszközök, tankönyvek közül lehetőleg olyanokat kell használni, amelyek lehetőséget biztosítanak a sokoldalú képességfejlesztésre, tartalmukban korszerűek és tananyagstruktúrában a tanulói ismeretszerzés sajátosságaihoz illeszkednek, ezért a tananyag eredményesebb elsajátítását teszik lehetővé.

A taneszköz kiválasztásánál érdemes előnyben részesíteni az alábbi jellemzőket, ha azok értelmezhetők az adott taneszközre:

- feladatokban gazdag,
- az egyéni haladást jól szolgáló, differenciált tanulást-tanítást támogató,
- az önálló tanulásra ösztönző, azt lehetővé tevő, tehát a tanulásiirányítást jól megvalósító,
- legyen motiváló hatású, például matematikatörténeti kitekintés, utalás más tantárgyak tartalmára,
- tanultakat rendszerező és jól strukturált,
- tipográfiaiailag jól szerkesztett (pl. ábrák, kiemelések), didaktikailag jól felépített tankönyveket.

A tanulók értékelése

A javasolt ellenőrzési módszerek:

- **feladatlapok** (állítások igazságtartalmának eldöntése, hibakereséses feladatok elvégzése, egyszerű feleletválasztás, többszörös feleletválasztás ellenpéldák indoklásával, logikai feladatok megoldása indoklással stb.);
- **írásbeli röpdolgozat** (egy vagy néhány óra anyagának számonkérése az adott napra való felkészültség mérésére, tartalma lehet elmélet és/vagy feladatmegoldás)
- **szóbeli felelet** (órán megoldott mintára feladatok számonkérése, házi feladatok helyes megoldásának szakszerű kommunikálása, lényegkiemelés, érvelés, kiselőadás felkészülés alapján, definíciók, tételek pontos kimondása, bizonyítások levezetése, órai feladatok stb.);
- **témazáró dolgozat** (nagyobb témakörök végén, vagy több témakör együttes zárásakor);
- **otthoni munka, házi feladat** (feladatok megoldása, gyűjtőmunka, megfigyelés, feladatok számítógépes megoldása stb.);
- **csoportmunka** (statisztikai adatgyűjtés, valószínűségi kísérletek elvégzése stb.);
- **projektmunka** és annak dokumentálása;
- **versenyeken, vetélkedőkön való szereplés**, elért eredmények.

A tantárgyi eredmények értékelése a hagyományos 5 fokozatú skálán történik. Fontos, hogy a tanulók

- **motiváltak legyenek** a minél jobb értékelés elnyerésére;
- tudják, hogy munkájukat hogyan fogják (szóban, írásban, osztályzattal) értékelni, – ez a tanár részéről **következetességet és céltudatosságot** igényel;
- fogadják meg **tanáraik** észrevételeit, **javaslatait**, kritikáit **akkor is, ha nem érdemjeggyel történik az értékelés**, tudják hasznosítani a fejlesztő értékelési megnyilvánulásokat.

Tantárgyi struktúra és óraszámok

Óraterv a kerettantervekhez – 9–12. évfolyam, gimnázium				
Tantárgyak	9. évf.	10. évf.	11. évf.	12. évf.
Matematika	5	5	6	6

9–10. évfolyam

A matematika kerettantervnek ez a fejezete a négyosztályos gimnáziumok azon tanulóinak szól, akik matematikából emelt szintű képzést választottak. Ezért a tananyag összeállításánál feltételezhetjük, hogy az átlagosnál jobb képességű, érdeklődőbb tanulóknak szól. A normál osztályokéhoz képest kiegészítő elemek kerülnek a tananyagba. Egyrészt olyanok, amelyek a motivációt növelhetik (pl. matematikatörténeti vonatkozások, játékok). Ha ezek a témakörök nem is nyújtanak közvetlen segítséget a versenyeken, érettségien, vagy majd a felsőfokú oktatásban való eredményesebb szerepléshez, mégis, ezeket jobb és kevésbé erős csoportokban egyaránt érdemes komolyan venni, rendszeresen beiktatni, mert a tantárgyhoz való kötődésben bekövetkező pozitív változás miatt a ráfordított idő bőven megtérül.

Másrészt olyan tananyagelemeket is szerepeltetünk ezeken az évfolyamokon, amelyek magabiztosabbá teszik a tanulók ismereteit, kitekintést nyújtanak egy-egy témakör szélesebb körű alkalmazásaira, segíthetik a versenyeken való eredményesebb szereplésüket. Ezeket az ismereteket az osztály vagy csoport szintjének megfelelő mélységben tárgyaljuk. A kevésbé erős csoportokban sem javasoljuk ezek elhagyását, mert a szemlélet fejlesztéséhez fontosak. Ezeknél a kerettanterv általában szemléletes, bizonyítás nélküli tárgyalást javasol. Az erősebb csoportokban tárgyalhatjuk ezeket részletesebben, több feladattal.

A középiskola első két évfolyamán sok, korábban már szereplő ismeret, összefüggés, fogalom újra előkerül úgy, hogy a fogalmak definiálásán, az ismeretek igazolásán, rendszerezésén, kapcsolataik feltárásán és alkalmazási lehetőségeik megismerésén lesz a hangsúly. Ezért a tanulóknak meg kell ismerkedniük a tudományos feldolgozás alapvető módszereivel. (Mindenkori által elfogadott alapelvek/axiómák, már bizonyított állítások, új sejtések, állítások megfogalmazása és azok igazolása, a fentiek összegzése, a nyitva maradt kérdések felsorolása, a következmények elemzése.)

A fenti célok az általános iskolai matematikatanítás céljaihoz képest jelentős többletet jelentenek. Fontos, hogy változatos módszertani megoldásokkal tegyük könnyebbé az átmenetet. Hasznosak lehetnek ebből a szempontból a matematikai alapú játékok is. A gyerekek szívesen játszanak maradékos osztáson, oszthatósági szabályokon alapuló számjátékokat és szimmetriákon alapuló geometriai, rajzos játékokat. Nyerni akarnak, ezért természetes módon elemezni kezdik a szabályokat, lehetőségeket. Olyan következtetésekre jutnak, olyan elemzéseket végeznek, amelyeket hagyományos feladatokkal nem tudnánk elérni. A geometria egyes területeinek (szimmetriák, aranymetszés) a művészetekben való alkalmazásait bemutattva világossá tehetjük a tanulók előtt, hogy a matematika a kultúra elválaszthatatlan része. A témakör egyes elemeihez kapcsolódva mutassuk be néhány matematikus életútját. Az ezekre a témákra fordított idő bőven megtérül az ennek következtében növekvő érdeklődés, javuló motiváció miatt.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jól tud problémákat megoldani. Gazdasági, sport témájú feladatokkal, számos geometriai és algebrai szélsőérték-feladattal lehet gyakorlati kérdésekre optimális megoldásokat keresni.

A középiskolás kor már alkalmassá teszi a tanulókat az önálló ismeretszerzésre. Le-
gyen követelmény, hogy egyes adatoknak, fogalmaknak, ismereteknek könyvtárban, interne-
ten nézzenek utána. Ez a kutatómunka hozzájárulhat a tanulók digitális kompetenciájának
fejlesztéséhez, ugyanezt szolgálhatja a geometriai és egyéb matematikai programok használa-
ta is.

9. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	10 óra
2. Számтан, algebra	80 óra
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	25 óra
4. Geometria	40 óra
5. Valószínűség, statisztika	10 óra
Szabadon felhasználható órakeret	15 óra
Az összes óraszám	180 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai lo- gika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának ismerete, alkalmazása problémamegoldásra, ma- tematikai modellek alkotására. Több szempont alkalmazása – megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fej- lesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Halmazok. Halmazokkal kapcsolatos ismeretek: üres halmaz, részhalmaz, halma- zok egyenlősége. Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementerhalmaz. Descartes-féle szorzat. A fogalmak ismételése, alkalmazása több halmazra. Pontos de- finíciók, jelölések használata. Halmazok felbontása diszjunkt halmazok uniójára. A halmazműveletek tulajdonságai. Összevetés a logikai műveletek tulajdonságaival.</p>		<p><i>Informatika:</i> könyvtár- szerkezet a számítógé- pen; adatbázis-kezelés, adatállományok, ada- tok szűrése különböző szempontok szerint.</p> <p><i>Magyar nyelv és iro- dalom:</i> mondatok, sza- vak, hangok rendsze- rezése.</p>

Halmazok számossága. n elemű halmaz részhalmazainak a száma. Véges és végtelen halmazok. <i>Matematikatörténet: Georg Cantor.</i>	<i>Biológia-egészségtan:</i> rendszerteran.
Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok készítése. Adott tulajdonságú halmazok konstruálása. Ábrák színezése, lefedése adott feltételek szerint. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre. (Invariáns mennyiség keresése.)	
Logika. Logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Rendszerező ismétlés feladatokon keresztül. A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése. Logikai és halmazelméleti műveletek kapcsolata. <i>Matematikatörténet: Pólya György, George Boole.</i>	
<u>Állítás, sejtés, tétel, bizonyítás. Alapfogalom, definíció.</u>	
Kombinatorika. <u>Egyszerűbb összeszámlálási feladatok – módszeres összeszámlálás</u>	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, komplementer halmaz.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számelmélet, algebra 2.1. Valós számok	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. Műveletek elvégzése a racionális számok halmazán fejből, írásban, számológéppel. Műveletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás. A négyzetgyök fogalma.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Számkörbővítés elveinek megértése, a valós számok halmazának ismerete. Gondolkodás: ismeretek rendszerezésének fejlesztése. Indirekt bizonyítási módszer alkalmazása. Absztrakciós készség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Számhalmazok: <ul style="list-style-type: none"> – természetes számok, – egész számok, – racionális számok, – irracionális számok, – valós számok. Mely műveletek nem vezetnek ki az egyes számhalmazokból? A racionális számok halmazán végzett műveletek biztonságos elvégzése		<i>Fizika, kémia, biológia-egészségtan:</i> a tér, az idő, az anyagmennyiség nagy és kis méreteinek megadása normálalakkal.

<p>se – ismétlés, gyakorlás. Műveleti tulajdonságok alkalmazása: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. Számok tizedes tört alakja. Véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos tizedes törtök. Számok normálalakja. Számolás normálalakban felírt számokkal. Normálalak a számológépen. A valós számok és a számegyenes kapcsolata. A racionális számok halmaza nem elegendő a számegyenes pontjainak jelölésére.</p>	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Valós szám, normálalak.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számelmélet, algebra 2.2. Algebrai kifejezések használata	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Összefüggések leírása algebrai kifejezésekkel, $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, helyettesítési érték, zárójelfelbontás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algebrai kifejezések biztonságos használata, célszerű átalakítási módok megtalálása, elvégzése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Algebrai kifejezések. Egész kifejezések, polinomok, törtkifejezések. Racionális és nem racionális kifejezések.</p>		<i>Fizika; kémia:</i> mennyiségek kiszámítása képlet alapján, képletek átrendezése.
<p>Nevezetes azonosságok: $(a \pm b)^2$, $(a + b + c)^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$. Utalás $(a + b)^n$ kiszámolásra Pascal-háromszög segítségével. Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása.</p>		
<p>Azonos átalakítások. Polinomok összeadása, kivonása. Polinomok szorzása, hatványozása. Szorzattá alakítás különböző módszerei. Polinom osztása polinommal. Algebrai törtekkel végzett műveletek. Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása, szorzása, osztása. Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse. <i>Matematikatörténet:</i> algebra – Al-Hvarizmi.</p>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Algebrai kifejezés, polinom, algebrai tört, azonosság.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számelmélet, algebra 2.3. Oszthatóság	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A korábbi években szerzett ismeretek elmélyítése, bővítése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Osztó, többszörös, oszthatóság, oszthatósági szabályok. Az oszthatósági szabályok rendszerezése. Analógiák nem tízes alapú számrendszerek oszthatósági szabályaiban. NIM játék. Példák egyéb számokkal (pl. 7-tel) való oszthatóságra tízes számrendszerben. Algebrai azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban. Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban.</p>		
<p>Prímszám, összetett szám, prímtényező felbontás. A számelmélet alaptétele. Végtelen sok prímszám van. Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről. Osztok számának, összegének, szorzatának meghatározása a prímtényező felbontásból. Kis Fermat-tétel. Néhány speciális prím: pl. Mersenne-prímek, Fermat-prímek, faktoriális prímek, Sophie Germain-prímek. <i>Matematikatörténet:</i> Euklidesz, Eratoszthenész, Euler, Fermat.</p>		<i>Informatika:</i> nagy prímek szerepe a titkosításban.
<p>Diofantoszi egyenletek. Lineáris diofantoszi egyenlet. Az $ax + by + cxy = d$ típusú diofantoszi egyenlet. Szöveges feladatok megoldása diofantoszi egyenlettel. <i>Matematikatörténet:</i> Diofantosz.</p>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Osztó, többszörös, prím, prímtényező felbontás, a számelmélet alaptétele, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számelmélet, algebra 2.4. Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer	Órakeret 25 óra
Előzetes tudás	Egyismeretlenes, elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az	

céljai	ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Számológép használata. Az önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Elsőfokú egyenletek. Alaphalmaz, megoldáshalmaz, igazsághalmaz. Ekvivalens átalakítások. Elsőfokú paraméteres egyenletek. Egyenletek grafikus megoldása.		<i>Fizika; kémia:</i> képletek értelmezése, egyenletek rendezése.
Elsőfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. A korábban tanult módszerek elmélyítése. További módszerek szöveges feladatok megoldására. Példák egyenlet nélküli megoldási módszerekre.		<i>Fizika:</i> kinematika, dinamika. <i>Kémia:</i> oldatok összetétele.
Törtes egyenletek, egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök. Mikor lesz egy tört értéke nulla, pozitív, negatív?		
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek. Algebrai és grafikus megoldás.		<i>Fizika:</i> a mérés hibája.
Elsőfokú egyenletrendszerek. Egyenletrendszerek grafikus megoldása. Behelyettesítő módszer. Egyenlő együtthatók módszere. Új ismeretlen bevezetése. Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek. Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
Elsőfokú egyenlőtlenségek. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszer.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Elsőfokú egyenlet, egyenlőtlenség, értelmezési tartomány, azonosság. Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Egyenletrendszer. Paraméteres egyenlet.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	3. Függvények 3.1. Algebrai függvények	Órakeret 25 óra
Előzetes tudás	Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Grafikonok készítése, olvasása. Pontok ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris függvények, fordított arányosság függvénye.	

<p>A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai</p>	<p>A tanult függvények felidézése. Függvénytranszformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvény-modell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába. Logikus, pontos gondolkodás, fogalmazás fejlesztése.</p>
<p style="text-align: center;">Ismeretek/fejlesztési követelmények</p>	
<p>Függvény fogalma. Rendszerező ismétlés. Értelmezési tartomány, értékkészlet. A függvény megadási módjai, ábrázolása, jellemzése: zérushely, monotonitás, szélsőérték. Új fogalmak: periodicitás, paritás, korlátosság. (Pontos definíciók. Néhány esetben a tagadás megfogalmazása is: pl. egy függvény nem páros, ha...) Kapcsolat: logika elemei – bármely, van olyan, negáció. Hétköznapi állítások tagadása. Pontos fogalmazás.</p>	<p><i>Informatika:</i> függvényábrázolás, grafikonkészítés számítógépes program segítségével. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> hétköznapi és szaknyelvi szóhasználat.</p>
<p>Lineáris függvények. Rendszerező ismétlés. Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapiakban.</p>	<p><i>Fizika; kémia:</i> egyenesen arányos mennyiségek.</p>
<p>Másodfokú függvények. Teljes négyzetté kiegészítés. Hatványfüggvények. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények. Abszolútérték-függvény. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Egészrész-, törtrész-, előjelfüggvény, Dirichlet-féle függvény. Függvények inverze. Gyökfüggvények.</p>	
<p>Fordított arányosság, elsőfokú törtfüggvény.</p>	<p><i>Fizika; kémia:</i> fordítottan arányos mennyiségek.</p>
<p>Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. $f(x)$ ábrázolása. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.</p>	
<p>Rekurzív sorozatok. A Fibonacci-sorozat. Kapcsolat: aranymetszés. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.</p>	<p><i>Biológia-egészségtan:</i> szimmetriák és nevezetes arányok megjelenése az élőlényeknél. <i>Művészetek:</i> szimmetriák és nevezetes arányok megjelenése az építészetben, festé-</p>

	szetben, zenében.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték, paritás. Függvénygrafikon, függvénytranszformáció.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	4. Geometria 4.1. Alapfogalmak, ponthalmazok, egybevágósági transz- formációk	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Térelemek kölcsönös helyzete, távolsága. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Speciális háromszögek, négyszögek elnevezése, felismerése, tulajdonságaik. Háromszögek szerkesztése alapadatokból. Háromszög köré írt kör és beírt kör szerkesztése. A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel ismerete. Geometriai transzformációk, a szimmetria felismerése környezetünkben, alkalmazásuk egyszerű feladatokban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. A szükséges és az elégséges feltétel felismerése. Összetett számítási probléma lebontása, számítási terv készítése (megfelelő részlet kiválasztása, a részletszámítások logikus sorrendbe illesztése). A geometriai transzformációk átfogó ismerete, alkalmazása problémamegoldásban. Szimmetria szerepének felismerése a matematikában, a művészetekben. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Geometriai alapfogalmak. Térelemek; kölcsönös helyzete, távolsága, szöge. Sokszögek szögösszege, átlók száma. A szög ívmértéke. A radián mint mértékegység. Átváltás fok és radián között.		<i>Fizika:</i> szögsebesség, szöggyorsulás. <i>Vizuális kultúra:</i> térbeli viszonyok.
Nevezetes ponthalmazok rendszerezése. <ul style="list-style-type: none"> – adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben; – két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben. Parabola, forgási paraboloid. Egyenlőtlenséggel meghatározott ponthalmazok. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek. <i>Matematikatörténet:</i> Descartes. Két vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése. Háromszög beírt, körülírt, hozzáírt körei. Háromszög további nevezetes vonalai. (Bizonyítással.) Középvonalak. (Négyszögek középvonalai is.) Magasságok – magasságpont. Súlyvonalak – súlypont. Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van – és fordítva. Geometriai szerkesztő program használata, Euler-gyenes, Feu-		<i>Fizika:</i> parabolatükör. <i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata.

erbach-kör bemutatása grafikus programmal.		
Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása. Számítási feladatok síkban és térben. Pitagorasz tételének alkalmazása bizonyítási feladatokban. Mikor hegyesszögű, illetve tompaszögű a háromszög? Két pont távolsága koordináta-rendszerben. A paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Négyyszög átlói merőlegességének feltétele. <i>Matematikatörténet: Pitagorasz.</i>		<i>Fizika:</i> vektor felbontása merőleges összetevőkre.
Thalész tétele és a tétel megfordítása. Szerkesztési és bizonyítási feladatok. Körérintő szerkesztése. <i>Matematikatörténet: Thalész.</i>		
Kerületi és középponti szögek. Húrnégyszög. Érintőnégyyszög.		
Geometriai transzformáció fogalma. Egybevágósági transzformációk rendszerező ismételése. Tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, identitás. A geometriai transzformációk tulajdonságai: <ul style="list-style-type: none"> – fixpont, fix egyenes, fix sík, – szögtartás, távolságtartás, irányítástartás. Szimmetrikus alakzatok, szimmetrián alapuló játékok. Geometriai transzformációk szorzata.		<i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata.
Geometriai szélsőérték-feladatok. Háromszögbe írt minimális kerületű háromszög. Izogonális pont.		<i>Földrajz:</i> minimális utak meghatározása.
Az egybevágóság fogalma. Alakzatok egybevágósága. A háromszögek egybevágóságának alapesetei.		
Műveletek vektorokkal: Összeadás, kivonás, számmal való szorzás. Vektorfelbontás tétele. Vektor koordinátái. Analógia a számhalmazokon végzett műveletekkel.		<i>Fizika:</i> vektormennyiségek: erő, sebesség, gyorsulás, térerősség.
Kulcsfogalmak/fogalmak	Tételek, sokszög, Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel, egybevágósági transzformáció. Vektor. Kerületi és középponti szög. Húrnégyszög. Érintőnégyyszög.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	5. Statisztika, valószínűség	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Adatok elemzése, átlag, táblázatok, grafikonok használata, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség egyszerű fogalma. Százalékszámítás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek rendszerezése. Tapasztalatszerzés újabb kísérletekkel, a kísérletek kiértékelése, következtetések. Diagram készítése, olvasása. Táblázat értelmezése, készítése. Számítógép használata az adatok rendezésében, értékelésében, ábrázolásában. A valószínűség és a relatív gyakoriság fogalmának mélyítése, kapcsolatuk belátása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Statisztikai adatok gyűjtése, elemzése és ábrázolása.</p> <p>Adatok rendezése, osztályokba sorolása, táblázatba rendezése, ábrázolása.</p> <p>Adathalmazok jellemzői: terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás.</p>		<p><i>Földrajz:</i> időjárási, éghajlati és gazdasági statisztikák.</p> <p><i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> történelmi, társadalmi témák vizuális ábrázolása (táblázat, diagram).</p> <p><i>Informatika:</i> adatkezelés, adatfeldolgozás, információ-megjelenítés.</p>
<p>Véletlen jelenségek megfigyelése.</p> <p>Kocka- és pénzérme-dobások – csoportmunka.</p>		<p><i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás.	

A fejlesztés várt eredményei a 9. évfolyam végén	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Halmazműveletek alkalmazása számhalmazokra, ponthalmazokra. – Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete. – Definíció, tétel felismerése, az állítás és megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése. – Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita és skatulyaelv alkalmazása feladatmegoldás során. – Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása. <p><i>Számelmélet, algebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegyenes alkalmazása. – Számok normálalakja, normálalakkal végzett műveletek alkalmazása. – Oszthatóság, a számelmélet alaptétele, alkalmazása.
---	---

- Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ismerete, alkalmazása.
- Prímekre vonatkozó tételek, sejtések ismerete.
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, azonosságok alkalmazása.
- Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása.
- A számológép használata.

Függvények, sorozatok

- A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete: korlátosság, periodicitás.
- A négyzetgyök függvény ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk elvégzése.
- Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján.

Geometria

- Tételek ismerete, távolság és szög fogalma, mérése.
- Nevezetes pontthalmazok rendszerezése, alkalmazása.
- A kör és részeinek ismerete.
- Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása (kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögek és érintőnéyszögek tételei).
- Egybevágósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete.
- Egybevágó alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
- Vektor fogalmának, vektorműveleteknek az ismerete. Vektorfelbontás, vektorkoordináták meghatározása adott bázisrendszerben.
- Háromszögek, négyszögek, sokszögek szögei, nevezetes vonalainak, köreinek ismerete. Az ismeretek alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban.
- A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel alkalmazása.

Valószínűség, statisztika

- Statisztikai adatok elemzése: adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése; adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának meghatározása.

10. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	20 óra
2. Számтан, algebra	65 óra
3. Összefüggések, függvények, sorozatok	20 óra
4. Geometria	40 óra
5. Valószínűség, statisztika	20 óra
Szabadon felhasználható órakeret	15 óra
Az összes óraszám	180 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának ismerete, alkalmazása problémamegoldásra, matematikai modellek alkotására. Több szempont alkalmazása – megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Kombinatorika.</p> <p>Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.</p> <p>Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.</p> <p>Kombináció – ismétlés nélkül.</p> <p style="padding-left: 20px;">Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétlés, a feladatmegoldási rutin mélyítése.</p> <p style="padding-left: 20px;">Jelek használata: $n!$, $\binom{n}{k}$.</p> <p style="padding-left: 20px;">Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik.</p> <p style="padding-left: 20px;">Pascal-háromszög.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal, Erdős Pál.</p> <p>Néhány kombinatorikus geometriai feladat.</p> <p style="padding-left: 20px;">n pont maximum hány egyenest határoz meg?</p> <p style="padding-left: 20px;">n egyenesnek maximum hány metszéspontja lehet?</p> <p style="padding-left: 20px;">n egyenes maximum hány részre osztja a síkot?</p> <p>Gráfok.</p> <p style="padding-left: 20px;">Néhány probléma ábrázolása gráfokkal.</p>		

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Permutáció, variáció, kombináció. Gráf.
------------------------------------	---

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számelmélet, algebra 2.1. Valós számok	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. Műveletek elvégzése a racionális számok halmazán fejből, írásban, számológéppel. Műveletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás. A négyzetgyök fogalma.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gondolkodás: ismeretek rendszerezésének fejlesztése. Indirekt bizonyítási módszer alkalmazása. Absztrakciós készség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Négyzetgyök. A négyzetgyökvonás azonosságai. \sqrt{n} irracionális, ha n nem négyzetszám. Indirekt bizonyítás. Bevitel a gyökjel alá. Kivétel a gyökjel alól. Nevező gyöktelenítése.		
Az n -edik gyök fogalma. A gyökvonás azonosságai. Páros és páratlan gyökkitevő. Bevitel a gyökjel alá. Kivétel a gyökjel alól. A szerkeszthetőség néhány kérdése. A tört kitevőjű hatvány. Permanencia-elv.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Négyzetgyök, n -edik gyök.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számelmélet, algebra 2.2. Algebrai kifejezések használata	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Algebrai kifejezések. Nevezetes azonosságok. Algebrai törtek.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algebrai kifejezések biztonságos használata, célszerű átalakítási módok megtalálása, elvégzése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Számítási, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két változóra. Szélsőérték-feladatok közepek segítségével. Kapcsolat: másodfokú függvények vizsgálata.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Nevezetes közepek.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számelmélet, algebra 2.4. Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Számológép használata. Az önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Másodfokú függvények vizsgálata. Teljes négyzetté alakítás használata. Szélsőérték-feladatok. Másodfokú függvény vizsgálatával. Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával történő megoldás. Optimális megoldásokra törekvés. Másodfokú egyenletek. Grafikus megoldás. Teljes négyzetté kiegészítés. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással.</p> <p>A másodfokú egyenlet megoldóképlete. A megoldóképlet készségi szintű alkalmazása. Számológép használata.</p> <p>A másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Diszkusszió. Önellenőrzés.</p> <p>Gyöktényezős alak, Viete-formulák. Másodfokúra visszavezethető egyenletek. Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Viete-formulák. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Cardano, Galois, Abel.</p>		<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú minimum- és maximumproblémák.</p> <p><i>Filozófia:</i> egy adott rendszeren belül megoldhatatlan problémák létezése.</p>
<p>Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. Modellalkotás, megoldási módszerek.</p>		<p><i>Fizika:</i> egyenletesen gyorsuló mozgás leírása.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>

Másodfokú egyenlőtlenségek. A megoldás megadása másodfokú függvény vizsgálatával. Többféle megoldási módszer összevetése.	
Másodfokú egyenletrendszer. Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. Emlékezés korábban megismert módszerekre, alkalmazás az adott környezetben.	<i>Fizika:</i> ütközések.
Gyökös egyenletek. Ekvivalens és nem ekvivalens egyenlet-megoldási lépések. Hamisgyök, gyökvesztés. Önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. Esetszétválasztások, divergens gondolkodás fejlesztése.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség, megoldóképlet, diszkrimináns. Négyzetgyökös egyenlet.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	3. Függvények 3.2. Hegyesszögek szögfüggvényei	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Hasonlóság alkalmazása számolási feladatokban. Pitagorasz-tétel.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Síkbeli és térbeli ábra készítése a valós geometriai problémáról. Számítási feladatok, a megoldáshoz alkalmas szögfüggvény megtalálása. Számológép, számítógép használata.	
Ismeretek és fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Távolságok, magasságok meghatározása arányokkal. A valóság kicsinyített ábrájáról szögeket és szakaszokat határozzunk meg méréssel és számolással. A hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója. Szögfüggvény értékének meghatározása számológéppel. Számítási feladatok szögfüggvények használatával síkban és térben.		<i>Fizika:</i> lejtőn mozgó testre ható erők kiszámítása.
Pótszögek szögfüggvényei. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. Nevezetes szögek szögfüggvényei: 30°; 60°; 45°. (Megtanulandók.) 18°, 36°, 54°, 72°. (Kiszámolás az „aranyháromszögből”.) Hegyesszög egy tetszőleges szögfüggvényének értékéből a többi szögfüggvény pontos értékének kiszámolása. A szögfüggvények általánosítása és egyszerűbb alkalmazásai		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Szögfüggvény.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	4. Geometria 4.2. Hasonlóság és kapcsolódó tételek	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Egybevágósági transzformációk. A háromszögek egybevágóságának alapesetei. Számítani és mértani közép. A számítani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A párhuzamos szelők tétele (bizonyítás nélkül) és megfordítása, következmények.</p> <p style="padding-left: 20px;">Szögfelező tétel.</p> <p style="padding-left: 20px;">A párhuzamos szelőszakaszok tétele.</p> <p style="padding-left: 20px;">Szakasz arányos osztása.</p> <p style="padding-left: 20px;">Negyedik arányos szerkesztése.</p>		
<p>A középpontos hasonlóság fogalma és tulajdonságai.</p> <p>A hasonlósági transzformáció fogalma és tulajdonságai.</p> <p>Szerkesztési, számítási, bizonyítási feladatok.</p>		<p><i>Földrajz:</i> térképek.</p> <p><i>Vizuális kultúra:</i> építészeti tervrajzok.</p> <p><i>Fizika:</i> optikai eszközök nagyítása.</p>
<p>Hasonló alakzatok.</p> <p style="padding-left: 20px;">A háromszögek hasonlóságának alapesetei.</p> <p style="padding-left: 20px;">A sokszögek hasonlósága.</p> <p>A hasonló síkidomok területének aránya.</p> <p>A hasonló testek felszínének és térfogatának aránya.</p> <p style="padding-left: 20px;">Annak tudatosítása, hogy kicsinyítésnél, nagyításnál a lineáris méretek, a felszín és térfogat nem egyformán változik.</p>		<p><i>Fizika:</i> hasonló háromszögek alkalmazása – lejtőmozgás, geometriai optika.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> példák arra, amikor az a hasznos, hogy adott térfogathoz nagy felszín, illetve, amikor adott térfogathoz kis felszín tartozzon.</p>
<p>Arányossági tételek háromszögekben.</p> <p style="padding-left: 20px;">Magasságtétel, befogótétel.</p> <p style="padding-left: 20px;">A számítani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség geometriai bizonyítása.</p> <p style="padding-left: 20px;">Mértani közép szerkesztése.</p> <p style="padding-left: 20px;">Egyszerű szélsőérték-feladatok.</p> <p style="padding-left: 20px;">Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele.</p>		<p><i>Vizuális kultúra:</i> festészet, építészet.</p> <p><i>Ének-zene:</i> az arany-metszés megjelenése zenei művekben.</p>

<p>Aranymetszés. Kapcsolat a Fibonacci-sorozattal.</p>	
<p>Forgatva nyújtás. Ptolemaiosz tétele. <i>Matematikatörténet: Ptolemaiosz.</i></p>	
<p>További nem távolságtartó transzformációk. Merőleges affinitás. Kapcsolat a függvény-transzformációkkal. Inverzió. (Csak mint példa nem távolságtartó transzformációra.)</p>	
<p>Néhány kapcsolódó tétel. Ceva és Menelaosz tétele. Euler tétele a beírt és körülírt kör középpontjának távolságára. Feuerbach-kör és Euler-egyenes. (Célszerű a bizonyításokat megmutatni, a bennük lévő ötletek miatt, de a teljes bizonyítások megtanulása nem szükséges.) <i>Matematikatörténet: Euler.</i></p>	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Hasonlósági transzformáció, hasonló alakzat, számtani és mértani közép.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	5. Statisztika, valószínűség	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség egyszerű fogalma. Százalékszámítás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek rendszerezése. Tapasztalatszerzés újabb kísérletekkel, a kísérletek kiértékelése, következtetések. A valószínűség és a relatív gyakoriság fogalmának mélyítése, kapcsolatuk belátása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény. Elemi esemény. Egyszerűbb események valószínűsége. Klasszikus valószínűségi modell. A valószínűség meghatározása kombinatorikus eszközökkel.</p>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Valószínűség.	

A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Halmazműveletek alkalmazása számhalmazokra, ponthalmazokra. – Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete. – Definíció, tétel felismerése, az állítás és megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése. – Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita és skatulyaelv alkalmazása feladatmegoldás során.
---	--

- Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása.
- Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére.

Számelmélet, algebra

- Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegegyenes alkalmazása.
- Számok normálalakja, normálalakokkal végzett műveletek alkalmazása.
- Oszthatóság, a számelmélet alaptétele, alkalmazása.
- Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ismerete, alkalmazása.
- Prímekre vonatkozó tételek, sejtések ismerete.
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, azonosságok alkalmazása.
- A gyökvonás fogalmának ismerete, a gyökvonás azonosságainak alkalmazása, gyökös egyenletek megoldása.
- Első- és másodfokú, és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szóveges feladatok megoldása.
- Másodfokú függvényekre vezető szélsőérték-problémák megoldása.
- Nevezetes közepek alkalmazása szélsőérték-problémák megoldásában.
- A számológép használata.

Függvények, sorozatok

- A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete: korlátosság, periodicitás.
- A négyzetgyök függvény ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk elvégzése.
- Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján.

Geometria

- Tételek ismerete, távolság és szög fogalma, mérése.
- Nevezetes pontthalmazok rendszerezése, alkalmazása.
- A kör és részeinek ismerete.
- Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása (kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögek és érintőnéyszögek tételei).
- Egybevágósági és hasonlósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete.
- Egybevágó alakzatok, hasonló alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
- Vektor fogalmának, vektorműveleteknek az ismerete. Vektorfelbontás, vektorkoordináták meghatározása adott bázisrendszerben.
- Háromszögek, négyszögek, sokszögek szögei, nevezetes vonalainak, köreinek ismerete. Az ismeretek alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban.
- A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel alkalmazása.
- Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete, alkalmazása.

	<p>sa.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Ceva-, Menelaosz-, Ptolemaiosz-, Euler-tétel ismerete, alkalmazása. <p><i>Valószínűség, statisztika</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Statisztikai adatok elemzése: adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása. – Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése; adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának meghatározása. – Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata. A műveletek elvégzése az eseménytérben. – A valószínűség klasszikus modelljének alkalmazása.
--	--

11–12. évfolyam

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, és egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, valamint a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó készség az élet legkülönbözőbb területein segíthet. Ezt célszerű tudatosítani a tanulóknban.

Ez a kerettantervi elem a matematika főiskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó készségen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható a tanulóktól többféle készség és ismeret együttes alkalmazása. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakításra. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktság pedig a felsőfokú képzsre való készülést.

A rendszerező összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

Több középiskolában a matematika emelt szintű csoportok tanulói bekapcsolódnak az iskola fakultációs rendszerébe. Ez a 11-12. évfolyamnak szóló kerettantervi fejezet természetesen alkalmas arra, hogy a 11–12. évfolyamos fakultációs csoportokban tanítsák. Ilyen csoportoknál viszont figyelemmel kell lenni arra, hogy ez a tanterv épít az alsóbb évfolyamok emelt szintű tanterveinek néhány elemére. Természetesen ezeket az ismereteket célszerű vagy a 11. év elején, vagy a megfelelő témakör tárgyalása előtt áttekinteni. Ehhez szükség lehet heti egy plusz órára.

11. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Gondolkodási és megismerési módszerek	20 óra + folyamatos
2. Hatvány, gyök, logaritmus	35 óra
3. Trigonometria	40 óra
4. Koordinátageometria	35 óra
5. Sorozatok	30 óra
6. Folytonosság, differenciálszámítás	40 óra
Szabadon felhasználható órakeret	16 óra
Az összes óraszám	216 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok	Órakeret 20 óra + folyamatos
Előzetes tudás	Matematikai állítások elemzése, igaz és hamis állítások. Logikai műveletek: NEM, ÉS, VAGY. Skatulya elv, logikai szita. Sorbarendezési és kiválasztási feladatok, gráfhasználat feladatmegoldásban. Gráf, csúcs, él, fokszám.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése. Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig. Algebrai számok, transzcendens számok.</p> <p>Halmazok számossága. Halmazok ekvivalenciája. Végtelen és véges halmazok. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. Kontinuum-sejtés. <i>Matematikatörténet:</i> Cantor, Hilbert, Gödel.</p>		<p><i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Bizonyíthatóság.</p>
<p>Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú matematikai objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok, függvények, egyenletek, műveletek, ábrák, lefedések, színezések stb. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható lét-</p>		

re. (Pl. invariáns mennyiség keresésével.) Példák a matematika történetéből lehetetlenségi bizonyításokra.		
Kombinatorika. (A korábbi ismeretek összegzése.) Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel. (Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétlés, rendszerezés.) Binomiális együtthatók, tulajdonságaik. Pascal-háromszög és tulajdonságai. Binomiális tétel. <i>Matematikatörténet:</i> Blaise Pascal. Néhány kombinatorikus geometriai probléma. <i>Matematikatörténet:</i> Erdős Pál.		
Gráfok. Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf). Gráfokra, éleikre, csúcsok fokszámaira vonatkozó egyszerű tételek. Euler-vonal, Hamilton-kör. Gráfok alkalmazása leszámolásos feladatokban – rendszerező ismétlés. <i>Matematikatörténet:</i> Euler.		<i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.
A matematika felépítése. Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések. Műveletek a matematikában. Műveleti tulajdonságok. Relációk a matematikában és a mindennapi életben. Relációtulajdonságok. Bizonyítási módszerek áttekintése. Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulya elv, teljes indukció. Tételek megfordítása.		<i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Állítások igazolásának szükségessége.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Permutáció, variáció, kombináció, művelet, reláció, binomiális együttható.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Hatvány, gyök, logaritmus	Órakeret 35 óra
Előzetes tudás	Hatványozás egész kitevővel, hatványozás azonosságai, n-edik gyök, gyökvonás azonosságai. Valós számok halmaza.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása: a racionális kitevő értelmezése, az irracionális kitevőjű hatvány szemléletes fogalma. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban: exponenciálisan, logaritmikusan változó mennyiségek. Más tudományágakban a matematika alkalmazásának felfedezése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok

<p>A racionális kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságainak ismétlése.</p> <p>Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel.</p> <p>Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal.</p> <p>A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra.</p> <p>Az exponenciális függvény.</p> <p>Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> kamatszámítás, hitelfelvétel, törlesztőrészlet-számítás.</p> <p><i>Fizika:</i> radioaktivitás.</p>
<p>Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek.</p> <p>Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.</p> <p>Exponenciális egyenletre vezető valós problémák megoldása.</p>	<p><i>Földrajz:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás).</p>
<p>Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.</p> <p>A logaritmus fogalma.</p> <p>Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.</p> <p>A logaritmus azonosságai.</p> <p>Szorzat, hányados, hatvány logaritmusra, áttérés más alapú logaritmusra.</p> <p>Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.</p> <p>A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.</p> <p><i>Matematikatörténet:</i> Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.</p>	<p><i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> zajszennyezés.</p> <p><i>Kémia:</i> pH-számítás.</p>
<p>A logaritmusfüggvény.</p> <p>A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.</p> <p>Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.</p> <p>Inverz függvénykapcsolat.</p>	<p><i>Fizika:</i> régészeti leletek – kormeghatározás.</p>
<p>Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek.</p> <p>Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.</p> <p>Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmusos egyenleteknél.</p>	
<p>Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek.</p>	
<p>Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése.</p>	
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Racionális kitevőjű hatvány. Exponenciális növekedés, csökkenés. Logaritmus.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	3. Trigonometria	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Vektorokkal végzett műveletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai látásmód fejlesztése. A művelet fogalmának bővítése egy újszerű művelettel, a skaláris szorzással. Algebrai és geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedezése más tudományterületeken is. A függvényszemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
A vektorokról tanultak rendszerező ismétlése: <ul style="list-style-type: none"> – a vektor fogalma, – vektorműveletek, – vektorfelbontás. A vektorok koordinátaival végzett műveletek és tulajdonságaik. A vektor 90°-os elforgatottjának koordinátái.	
A szögfüggvények általános értelmezése. Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták. A szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben. Szögfüggvények közötti összefüggések. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. A trigonometrikus függvények. A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, szélsőérték, periódus, monotonitás. A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat.	<i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása. <i>Informatika:</i> grafikonok elkészítése számítógépes programmal.
Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai. A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban. Merőleges vektorok skaláris szorzata. Szükséges és elégséges feltétel. Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével. A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenlőtlenség kapcsolata. Vektorok vektoriális szorzata. Szemléletes kép, bizonyítások nélkül.	<i>Fizika:</i> munka, elektromosság.
A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével. A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével. Szinusztétel. Koszinusztétel. A tételek pontos kimondása, bizonyítása. Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel.	<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> alakzatok adatainak meghatározása. <i>Földrajz:</i> távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok.

<p>Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata. Szög, távolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban is. Bizonyítási feladatok.</p>	GPS-helymeghatározás.
<p>Szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek:</p> <ul style="list-style-type: none"> – két szög összegének és különbségének szögfüggvényei, – egy szög kétszeresének szögfüggvényei, – félszögek szögfüggvényei, – két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása. <p>A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása. Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása. Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel. Tangenstétel.</p>	
<p>Trigonometrikus egyenletek. Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése. Trigonometrikus egyenlőtlenségek. Grafikus megoldás vagy egységkör alkalmazása. Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata. Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése.</p>	<p><i>Fizika:</i> rezgőmozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsulás-hoz tartozó időpillanatok meghatározása.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Skaláris szorzat, szinusztétel, koszinusztétel, addíciós tétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet.</p>

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	4. Koordinátageometria	Órakeret 35 óra
Előzetes tudás	Koordinátarendszer, vektorok, vektorműveletek megadása koordinátákkal. Ponthalmazok koordináta-rendszerben. Függvények ábrázolása. Elsőfokú, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel. Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel. Számítógép használata.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A Descartes-féle koordinátarendszer. A helyvektor és a szabadvektor. Rendszerező ismétlés.</p>		<p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>Vektor abszolútértékének kiszámítása. Két pont távolságának kiszámítása. A Pitagorasz-tétel alkalmazása. Két vektor hajlásszöge. Skaláris szorzat használata.</p>		
<p>Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái.</p>		<p><i>Fizika:</i> alakzatok tömegközéppontja.</p>

Elemi geometriai ismereteket alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása.		
<p>Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző jellemzők közötti kapcsolat értéke, használata.</p> <p>Az egyenes egyenletei.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete. – Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszere térben. – Iránytényezős egyenlet. <p>Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel. Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata. A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása.</p> <p>Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele. Két egyenes metszéspontja. Két egyenes szöge. Skaláris szorzat használata.</p>		<p><i>Fizika:</i> mérések értékelése.</p> <p><i>Informatika:</i> számítógépes program használata.</p>
<p>A kör egyenlete. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.</p> <p>Kör és egyenes kölcsönös helyzete. A kör érintőjének egyenlete. Két kör közös pontjainak meghatározása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthetőségi kérdések.</p>		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
<p>A parabola tengelyponti egyenlete. A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.</p> <p>A parabola és a másodfokú függvény. Teljes négyzetté kiegészítés.</p> <p>A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.</p>		<i>Fizika:</i> geometriai optika, fényszóró, visszafelé tükröző tükör.
<p>Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével vagy a szerkesztés menetének követésével. Mértani helyek keresése. Apollóniosz-kör. Merőleges affinitással kapott mértani helyek. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Egyenlőtlenséggel megadott egyszerű feltételek. Lineáris programozási feladat.</p>		<i>Informatika:</i> több feltétel együttes vizsgálata.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, kör, parabola egyenlete.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	5. Sorozatok		Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Számítási sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések.		
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása.		
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok	
<p>A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszerező ismételése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat. Rekurzív sorozat n-edik elemének megadása. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.</p>		<p><i>Informatika:</i> algoritmusok.</p>	
<p>Számítási sorozat. A számítási sorozat n-edik tagja. A számítási sorozat első n tagjának összege. Mértani sorozat. A mértani sorozat n-edik tagja. A mértani sorozat első n tagjának összege. Számítási feladatok számítási és a mértani sorozatokra. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal. A számítási sorozat mint lineáris és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása. Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása. Törlesztési feladatok. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjáradék. Véges sorok összegzése. Számítási és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése. Teleszkópos összegek. <i>Matematikatörténet:</i> Fibonacci.</p>		<p><i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> lineáris és exponenciális folyamatok. <i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> hitel – adósság – eladósodás.</p>	
<p>Sorozatok konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. Műveletek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok. Az $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatok. Konvergens sorozatok tulajdonságai. Torlódási pont. Konvergens sorozatnak egy határértéke van. Minden konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens. Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrlv.</p>			
<p>Végtelen sorok. Végtelenen sor konvergenciája, összege. Végtelen mértani sor.</p>			

<p>Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása. További példák konvergens sorokra. Teleszkópos összegek. Négyzetszámok reciprokainak összege. Példák nem konvergens sorokra. Harmonikus sor. Feltételesen konvergens sorok.</p>	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	6. Folytonosság, differenciálszámítás	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékkészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.		<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására.
<p>Függvény határértéke. A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések. Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke. A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.</p>		<p><i>Informatika:</i> a határérték számítógépes becslése. <i>Fizika:</i> felhasználás $\sin x$, illetve $\operatorname{tg} x$ közelítésére kis szög esetében.</p>
<p>A függvények folytonossága. Példák folytonos és nem folytonos függvényekre. A folytonosság definíciói. Intervallumon folytonos függvények. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai. (Bizonyítások nélkül, de ellenpéldákkal azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve ha a függvény nem folytonos.)</p>		<i>Fizika:</i> példák folytonos és diszkrét mennyiségekre.
Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére.		<i>Fizika:</i> az út-idő függ-

<p>A függvénygörbe érintőjének iránytangense. A pillanatnyi sebesség meghatározása.</p>	<p>vény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata. A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata.</p> <p><i>Biológia-egészségtan:</i> populáció növekedésének átlagos sebessége.</p>
<p>A differenciálhatóság fogalma. A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény. Példák nem differenciálható függvényekre is. Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között. Alapfüggvények deriváltja: Konstans függvény, x^n, trigonometrikus függvények deriváltja. Műveletek differenciálható függvényekkel. Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja. Inverz függvény deriváltja. Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.) Magasabbrendű deriváltak. <i>Matematikatörténet:</i> Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.</p>	<p><i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata.</p>
<p>A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény. – Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. <p>A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása. Középértéktételek. Rolle- és Lagrange-tétel. (Szemléletes kép.)</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai tartalmú függvények (pl. út-idő, sebesség-idő) deriváltjainak jelentése.</p>
<p>Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexiós pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.</p>	
<p>Függvényvizsgálat differenciálszámítással. Összevetés az elemi módszerekkel.</p>	
<p>Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása. A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.</p>	<p><i>Fizika:</i> Fermat-elv, Snellius-Descartes törvény. Fizikai jellegű szélsőérték-problémák.</p>
<p>Kulcsfogalmak/ fogalmak</p>	<p>Függvényfolytonosság, -határérték. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabbrendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény.</p>

**A fejlesztés várt
eredményei a 11.
évfolyam végén**

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése.
- A kombinatorikai problémák rendszerezése.
- Bizonyítási módszerek áttekintése.
- A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában.

Számelmélet, algebra

- A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete.
- A logaritmus fogalmának ismerete.
- A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben, probléma megoldása céljából.
- Exponenciális és logaritmosos egyenletek megoldása, ellenőrzése.
- Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása.
- Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.
- A számológép biztos használata.

Függvények, az analízis elemei

- Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk.
- Exponenciális folyamatok matematikai modellje.
- A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok.
- Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése.
- Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése.
- A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával.

Geometria

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.
- Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

12. évfolyam

Tematikai egység címe	órakeret
1. Integrálszámítás, térgeometria	50 óra
2. Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása	20 óra
3. Valószínűség, statisztika	30 óra
4. Rendszerező összefoglalás	70 óra
Szabadon felhasználható órakeret	16 óra
Az összes óraszám	186 óra

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	8. Integrálszámítás, térgeometria	Órakeret 50 óra
Előzetes tudás	Folytonos függvények fogalma. Területszámítás elemei. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az integrálszámítás módszereivel találkozáskor a közelítő módszerek ismeretének bővítése. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén. Áttekintő képet kialakítása a térgeometriáról, a felszín- és térfogatszámítás módszereiről.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>A területszámítás alapelvei. Néhány egyszerűbb alakzat területének levezetése az alapelvekből.</p> <p>A területszámítás módszereinek áttekintése. Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témakörében. (Pl. geometriai bizonyításokban.)</p>		
<p>A térfogatszámítás alapelvei. Néhány egyszerűbb test térfogatának levezetése az alapelvekből.</p> <p>A térfogatszámítás áttekintése. A térfogatszámítás néhány új eleme. Cavalieri-elv, a gúla térfogata. Csonkagúla térfogata. Érintőpoliéderek térfogata.</p> <p>Alakzatok felszíne, hálójája. Csonkakúp felszíne. Gömb felszínének levezetése (Heurisztikus, nem precíz módszerrel.)</p>		
<p>Térgeometria elemei. Tetraéderekre vonatkozó tételek. (Van-e beírt, körülírt gömbje, súlypontja, magasságpontja?)</p>		<p><i>Kémia:</i> kristályok.</p> <p><i>Művészetek:</i> szimmet-</p>

<p>Ortogonalis tetraéder. Tetraéder és paralelepipedon. Euler-féle poliéder-tétel. (Bizonyítás nélkül.) Szabályos testek.</p>	<p>riák.</p>
<p>Bevezető feladatok az integrál fogalmához. Függvény grafikonja alatti terület. A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület. A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.</p>	
<p>Alsó és felső közelítő összegek. Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület-előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére. <i>Matematikatörténet: Bernhard Riemann.</i></p>	<p><i>Informatika: számítógépes szoftver használata.</i></p>
<p>Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai.</p>	<p><i>Fizika: A munka és a mozgási energia. Elektromos feszültség két pont között, a potenciál. Tehetetlenségi nyomaték. Alakzat tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség.</i></p>
<p>Az integrál mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között. A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál: – hatványfüggvény, polinomfüggvény, – trigonometrikus függvények, – exponenciális függvény, logaritmusfüggvény. A Newton-Leibniz-tétel. Integrálási módszerek: Integrálás helyettesítéssel. <i>Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.</i></p>	
<p>Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása.</p>	<p><i>Fizika: Potenciál, munkavégzés elektromos, illetve gravitációs</i></p>

Henger, kúp, csonkakúp, gömb, gömbszelet térfogata. Az integrálás közelítő módszerei – numerikus módszerek.	erőtérben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség. Newton munkássága.
Néhány egyszerűbb improprius integrál. Néhány hatványsor. (Formális meghatározás integrálással.) Hatványsorok szerepe a matematikában, fizikában, informatikában. Hogyan számolnak az egyszerű számológépek 12 jegy pontossággal?	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Alsó- és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton-Leibniz-tétel. Felszín, térfogat, forgástestek, csonkagúla, csonkakúp, gömb.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Nevezetes azonosságok ismerete. Közepék és sorrendjük ismerete két változóra. Másodfokú és trigonometrikus függvények ismerete.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása. A modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal. A szélsőérték-problémához illő megoldási mód kiválasztása. Gyakorlat optimális megoldások keresésében.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Azonos egyenlőtlenségek.</p> <p>Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek. (Többváltozós alak bizonyítása fokozatos közelítés módszerével.)</p> <p>Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában.</p> <p>Szélsőérték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével. (Másodfokú és trigonometrikus függvényekkel.)</p> <p>Szélsőérték-feladatok megoldása fokozatos közelítés módszerével.</p> <p>Bernoulli-egyenlőtlenség.</p> <p>Cauchy-egyenlőtlenség.</p> <p>Jensen-egyenlőtlenség. (Bizonyítás nélkül, szemléletes képpel.) Környezetvédelem: legrövidebb utak és egyéb optimális módszerek keresése.</p>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Szélsőérték hely, szélsőérték. Nevezetes közép.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	3. Statisztika, valószínűség	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Adatok elemzése, táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell.	

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Mit jelent a valószínűség – a nagy számok törvénye.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p>Statisztikai mintavétel. Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül. Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás. Gyakorlati példák arra, hogy mikor melyik mutatóval célszerű jellemezni a számsokaságot. Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés. A medián és az átlag minimumtulajdonsága. Közvélemény-kutatás. Statisztikai évkönyv. Minőség-ellenőrzés.</p>		<p><i>Informatika:</i> táblázatkezelő, adatbáziskezelő program használata. <i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> választások.</p>
<p>Eseményalgebra. Kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel. <i>Matematikatörténet:</i> George Boole.</p>		
<p>Véletlen jelenségek megfigyelése. A modell és a valóság kapcsolata. Szerencsejátékok elemzése. Klasszikus valószínűségi modell. Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége. Kizáró események, független események valószínűsége. Feltételes valószínűség. Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján. Nagy számok törvénye. (Szemléletes tárgyalás képletek nélkül.) Geometriai valószínűség. <i>Matematikatörténet:</i> Pólya György, Rényi Alfréd.</p>		<p><i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.</p>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Valószínűség, kizáró esemény, független esemény.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	10. Rendszerező összefoglalás	Órakeret 70 óra
Előzetes tudás	A 4 év matematika-tananyaga.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	<p>Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben. Felkészítés az emelt szintű érettségire: az önálló rendszerzés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, alkalmazási lehetőségek megtalálása. Kapcsolatok keresése különböző témakörök között. Elemzőkészség, kreativitás fejlesztése. Felkészítés a felsőfokú oktatásra.</p>	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<p><i>Gondolkodási módszerek</i> <i>Halmazok, matematikai logika</i></p>		<p><i>Filozófia:</i> gondolati rendszerek felépítése,</p>

<p>Halmazok, megadási módjaik, részhalmaz, kiegészítő halmaz. Halmazok közötti műveletek. Végtelen halmazok elmélete; számosságok. Állítások, logikai értékük. Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Univerzális és egzisztenciális kvantor. <i>Kombinatorika, gráfok, algoritmusok</i> Permutáció, variáció, kombináció. Binomiális tétel. Pascal háromszög. Elemi gráfelméleti ismeretek. Euler-féle poliédertétel. A bizonyítások fejlődése és a bizonyítási módszerek változása. Nevezetes sejtések.</p>	<p>fejlődése.</p>
<p><i>Algebra és számelmélet</i> <i>Műveletek kifejezésekkel</i> Algebrai kifejezések átalakításai, nevezetes szorzatok. A hatványozás azonosságai. Matematikai fogalmak fejlődése, permanencia-elv. Gyökös kifejezések átalakításai. Exponenciális és logaritmikus kifejezések átalakításai. <i>Számelmélet</i> Oszthatósági szabályok. Számolás maradékokkal. Prímszámok. Oszthatósági feladatok megoldása. <i>Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek</i> Lineáris és lineárisra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Polinomok algebrája. Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek.</p>	<p><i>Fizika; kémia:</i> számítási feladatok megoldása.</p>
<p><i>Függvények, sorozatok, az analízis elemei</i> <i>Függvények</i> A függvény fogalma. Függvények rendszerezése a definiáló kifejezés szerint: konstans, lineáris, egészrész, törtrész, másodfokú, abszolútérték, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus függvények. Függvények rendszerezése tulajdonságaik szerint. Függvénytranszformációk. Valós folyamatok elemzése függvénytani modellek szerint. <i>Sorozatok, sorok</i> A sorozat fogalma. Számítani, mértani sorozat. Rekurzióval megadott egyéb sorozatok.</p>	<p><i>Informatika:</i> számítógépes programok használata függvények ábrázolására, vizsgálatára. <i>Fizika:</i> Az analízis alkalmazásai a fizikában. A matematika és a fizika kölcsönhatása az analízis módszereinek kialakulásában.</p>

<p>Sorozatok monotonitása, konvergenciája. A végtelen mértani sor.</p> <p><i>Analízis</i></p> <p>Függvények korlátossága és monotonitása. Függvény határértéke, folytonossága. Differenciálhányados, derivált függvény. Differenciálási szabályok. L'Hospital-szabály. Függvényvizsgálat differenciálás segítségével. Szélsőérték-meghatározási módok. A tanult függvények primitív függvényei. Integrálási módszerek. A határozott integrál. Newton–Leibniz-tétel. A határozott integrál alkalmazásai. Improprius integrál.</p>	
<p><i>Geometria</i></p> <p><i>Geometriai alapfogalmak</i> Tételek köcsönös helyzete, távolsága, szöge.</p> <p><i>Geometriai alakzatok, bizonyítások</i> Nevezetes ponthalmazok. Síkdomok, testek, tulajdonságaik. Elemi sík- és térgeometriai tételek.</p> <p><i>Geometriai transzformációk</i> Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, tulajdonságaik. Szerepük a bizonyításokban és a szerkesztésekben.</p> <p><i>Vektorok, trigonometria, koordináta-geometria</i> Vektor fogalma, műveletek a vektorok körében. Matematikai fogalmak fejlődésének követése. Vektorfelbontás, vektorok koordinátái. Hegyesszög szögfüggvényei. Szinusz- és koszinusztétel. A háromszög hiányzó adatainak kiszámolása. Trigonometrikus azonosságok. Az egyenes egyenletei, egyenletrendszere (síkban és térben). A kör egyenletei. A kúpszeletek definíciója, egyenleteik.</p> <p><i>Geometriai mértékek</i> A hosszúság és a szög mértékei. Kiszámolási módjaik. A kétoldali közelítés módszere. A terület fogalma és kiszámítási módjai. A felszín és térfogat fogalma és kiszámítási módjai. Az integrálszámítás felhasználása alakzatok mértékének kiszámításához.</p>	<p><i>Művészetek: szimmetriák, aranymetszés.</i></p> <p><i>Informatika: számítógépes geometriai programok használata.</i></p>
<p><i>Valószínűségszámítás, statisztika</i> Statisztikai alapfogalmak: módus, medián, átlag, szórás. Eseményalgebra és műveleti tulajdonságai. Teljes eseményrendszer. A matematika különböző területeinek összekapcsolása:</p>	<p><i>Informatika: táblázatkezelő, adatbáziskezelő program használata.</i></p>

<p>Boole-algebra. Grafikonok, táblázatok, diagrammok készítése és olvasása. Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság. A valószínűség kiszámítási módjai. Feltételes valószínűség. Mintavételi feladatok klasszikus modell alapján. Szerepük a mindennapi életben. A véletlen szabályszerűségei, a nagy számok törvénye. A közvéleménykutatás elemei.</p>	<p><i>Fizika:</i> fizikai jelenségek valószínűség-számítási modellje.</p>
<p><i>Motivációs témakörök</i> Néhány matematikatörténeti szemelvény. A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. (Pl. Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról.) Matematikusokkal kapcsolatos történetek. Matematika alapú játékok. Logikai feladványok, konstrukciós feladatok. A matematika néhány filozófiai kérdése. A matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői. Néhány megoldatlan és megoldhatatlan probléma.</p>	<p><i>Informatika:</i> könyvtárhasználat, internet-használat.</p>

<p>A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén</p>	<p><i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése. – A kombinatorikai problémák rendszerezése. – Bizonyítási módszerek áttekintése. – A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában. <p><i>Számelmélet, algebra</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete. – A logaritmus fogalmának ismerete. – A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben, probléma megoldása céljából. – Exponenciális és logaritmosus egyenletek megoldása, ellenőrzése. – Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása. – Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése. – A számológép biztos használata. <p><i>Függvények, az analízis elemei</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése. – Függvénytranszformációk. – Exponenciális folyamatok matematikai modellje. – A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok. – Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése. – Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése. – A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és diffe-
--	--

renciálszámítás használatával.

- Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása.

Geometria

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.
- Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.
- Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése.
- Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.

Valószínűség, statisztika

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja.
- Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.